Géométrie dans l'espace

Exercice N°1 Indiquer toutes les réponses correctes.

1) Soit ABCDEFGH un cube d'arrête 1 alors $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} =$ a) $\overrightarrow{DH}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{DH}$; c) $\sqrt{2}\overrightarrow{AE}$.

2) Soient $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace alors $\vec{U} \wedge \vec{V} =$ a) $\vec{V} \wedge \vec{U}$; b) ; $\left(-\vec{V}\right) \wedge \vec{U}$; c) $-\left(\vec{V} \wedge \vec{U}\right)$.

3) L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$ est

a) la droite (AC) ; b) le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$; c) la droite perpendiculaire à (AC) en A.

4) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ est a) La droite (AB) ; b) un plan ; c) $\{A, B\}$

5) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est

a) la droite $\left(C, \overrightarrow{AB}\right)$; b) le plan passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$; c) Le plan (ABC).

6) A, B et C trois points de l'espace tel que ABC est un triangle isocèle en A. L'ensemble des points M de l'espace tel que : $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ est a) le plan ABC ; b) la médiatrice de [BC];c) la droite parallèle à (BC) passant par A.

7) Si $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que $\left\|\vec{U}\right\| = 2, \left\|\vec{V}\right\| = 3$ et $\vec{U}.\vec{V} = -3$ alors

a) $\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| = 6$; b) $\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| = 3\sqrt{3}$; c) $\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| = \frac{3}{2}$.

8) Soit A, B et C trois points non alignés l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AM} = 0$ est :

a) Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$; b) Le plan (ABC) ; c) La droite perpendiculaire au plan (ABC) en A.

9) Soit A, B et C trois points non alignés l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :

a) Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$; b) Le plan (ABC) ; c) La droite perpendiculaire au plan (ABC) en A.

Exercice N°1 1) a) ; 2) b) et c) ; 3) b) ; 4) a) ; 5) a) ; 6) b) ; 7) b) ; 8) b) ; 9) c)

Exercice N°2 vrai - faux

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace .

1) Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *et* $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors on a $\vec{v} = \vec{0}$.

2) L'image d'un plan d'équation x+y=0 par une translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un plan d'équation x+y-2=0.

3) L'application f qui à M(x,y,z) associe le point $\begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y - 20 \\ z' = -3z + 16 \end{cases}$ est une homothétie de centre $\Omega(2, -5, 4)$ et de rapport-3

4) Soit ABC un triangle de centre de gravité G alors l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ est la droite (OG).

5) Soit t un réel strictement positif et différent de 1. On donne les points $I(\ln t, -\ln t, 2\ln t)$ *et* $J(2\ln t, 0, -\ln t)$

a) $S_t = \left\{M \in E \text{ tel que } \overrightarrow{MI_t}.\overrightarrow{MJ_t} = 0\right\}$ est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\ln t, -\frac{1}{2}\ln t, \frac{1}{2}\ln t\right)$ *et de rayon* $R_t = \frac{\sqrt{11}\ln t}{2}$.

b) Le plan d'équation cartésienne x+y-z=0 et la sphère S_e $(t = e)$ sont tangents.

6) Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

7) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace si $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = 0$.

8) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace si $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u}$ *alors* $\vec{u}.\vec{w} = 0$.

Exercice N°2 1) F ; 2) V ; 3) V ; 4) V ; 5) a)F ;b) F ; 6) V ; 7) F ; 8) V

Exercice N°3 On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 1.

1) a) Exprimer plus simplement $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$ *et* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$ puis que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

2) Montrer que le centre de gravité I du triangle BDE est le point d'intersection de (AG) et du plan (BDE).

Exercice N°3

1) a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

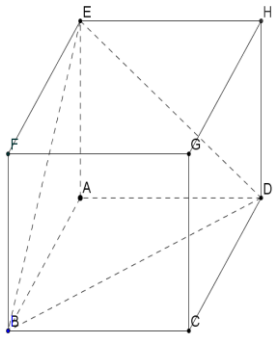
b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE}=0$

.

D'après les résultats précédents $(AG)\perp(BD)$ *et* $(AG)\perp(BE)$ donc (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).



2) BDE est un triangle équilatéral donc il suffit de montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle BDE. AE=AB=AD (ABCDEFGH est un cube). GE=GB=GD (ABCDEFGH est un cube) donc (AG) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BDE et comme $\{I\}=(AG)\cap(BED)$ donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle BED et par suite I est le centre de gravité du triangle BED.

Exercice N°4 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace E muni d'un repère orthonormé directe $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Montrer que $\forall M\in E$ le vecteur $\vec{N}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$ est un vecteur normal au plan ABC et que $\vec{N}$ est indépendant de M.

2) On suppose que A(1,2,0) ,B(2,4,5) et C(2,3,-1).

a) Donner les coordonnés du point Ω tels que $\overrightarrow{A\Omega}=\vec{N}$.

b) Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre Ω et tangente à (ABC).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan Q=(ABΩ) en déduire la distance d entre C et le plan Q.

Exercice N°4

1) $\vec{N}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}\wedge\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=$

$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

2) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\6\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A\Omega}=\vec{N}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-7\\y-2=6\\z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\y=8\\z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\Omega(-6,8,-1)$.

b) S tangente à (ABC):-7x+6y-z+d=0, $A\in(ABC)\Rightarrow$-7+12+d=0 donc d=-5 d'où (ABC) :-7x+6y-z-5=0. S de rayon $r=d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{\left|-7(-6)+6(8)+1-5\right|}{\sqrt{7^2+6^2+1}}=\sqrt{86}$ donc S :$(x+6)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=86$.

Exercice N°5

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'un repère orthonormé directe de E et $\vec{u}$ le vecteur défini par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ .f l'application de E dans E qui à M(x,y,z) on associe M'(x',y',z') tel que $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble des points invariants par f.

2) a) Montrer que $\forall M\notin\mathcal{D}$ on a $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal du plan P=(M, $\mathcal{D}$).

b) Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ avec $M\notin\mathcal{D}$ calculer en fonction de x, y et z l'aire du triangle OMM' et le volume du tétraèdre OMM'H.

Exercice N°5 $f(M)=M'$; $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$ *avec* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1) $f(M)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{0}\Leftrightarrow$ M est un point de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) a) $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OM}-\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal du plan P(M, $\mathcal{D}$).

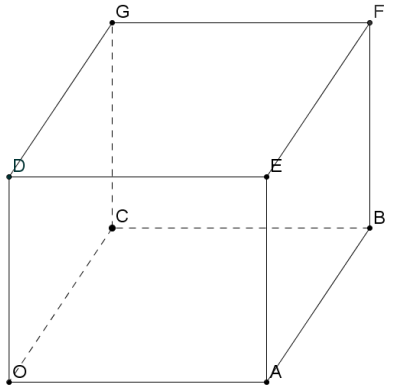
Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

b) $\mathcal{A}_{(OMM')}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MM'}\right\|}{2}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|}{2}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|\times\left|\sin\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right\|$

car $\overrightarrow{OM}\perp\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$

Exercice N°6 Soit le cube OABCDEFG représenté sur la figure ci-dessous. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. On désigne par a un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définie par :

$\overrightarrow{OL}=a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{BF}$.



1) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$.

b) En déduire l'aire du triangle DLM.

c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DML).

2) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DML).

a) Démontrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH}=\lambda.\overrightarrow{OK}$. Démontrer que $\lambda=\dfrac{a}{a^2+2}$.

c) En déduire que H appartient au segment [OK]. d) Déterminer les cordonnés de H.

e) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que : $HK=\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3) A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

Exercice N°6 1) a) Les coordonnés de D, M et L dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ sont D(0,0,1), M(a,0,0) et L(0,a,0)

d'où $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}0\\a\\-1\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}a\\a\\a^2\end{pmatrix}$.

b) L'aire A_1 du triangle DLM s'exprime à l'aide du produit vectoriel : $A_1=\dfrac{\left\|\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}\right\|}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+a^2+a^4}}{2}=\dfrac{a\sqrt{a^2+2}}{2}$.

c) On a B(1,1,0), F(1,1,1) et $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{BF}$ *donc* $K(1,1,a)$ alors $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DL}=1\times0+1\times a+a\times(-1)=0$ *et* $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DM}=0$, (OK) étant orthogonale à (DL) et (DM) est donc orthogonale au plan (DLM).

2) a) Comme H et M appartiennent au plan (DML), la droite (HM) est donc orthogonale à la droite (OK) et donc que $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK}=0$, on a alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

b) Comme M(a,0,0) et K(1,1,a) alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=a$, de plus $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\lambda.\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OK}=\lambda\left(1+1+a^2\right)=\lambda\left(2+a^2\right)$

$d'où\ \lambda\left(2+a^2\right)=a\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{a}{a^2+2}$. Le trinôme ($a^2$-a+2) ayant un discriminant négatif donc il a un signe constant positif donc $a^2-a+2>0\Leftrightarrow a^2+2>a\Rightarrow1>\dfrac{a}{a^2+2}>0$ puisque a est un réel positif alors $H\in[OK]$.

c) On a $\overrightarrow{OH}=\lambda.\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=\dfrac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$ *alors* $H\left(\dfrac{a}{a^2+2},\dfrac{a}{a^2+2},\dfrac{a^3}{a^2+2}\right)$.

d) On a $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OK}-\dfrac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}=\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$ *or* $HK=\left\|\overrightarrow{HK}\right\|=\left|\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\right|\left\|\overrightarrow{OK}\right\|=\left|\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\right|\times\sqrt{a^2+2}$ on a $\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}>0$ *donc* $HK=\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\sqrt{a^2+2}=\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3) Soit V le volume du tétraèdre DLMK, alors $V=\dfrac{1}{3}A_1\times HK=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{a^2+2}}{2}\times\dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}=\dfrac{a\left(a^2-a+2\right)}{6}$

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice N°7 L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK}\right)$. On considère le cube de sommets O, I, R, J, K, L, M, N. On note A le milieu de [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A et B. b) Déterminer les coordonnés du vecteur $\vec{U}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.

c) Montrer alors que l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

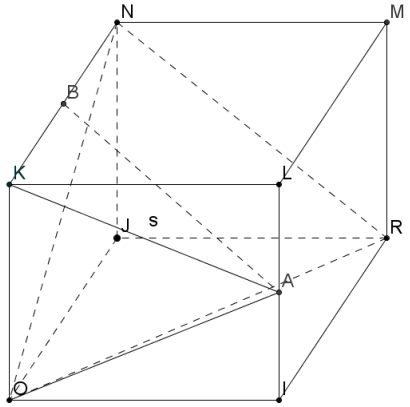
2) Le point $C\left(1,\frac{1}{3},1\right)$ appartient-il à (P) ? Justifier votre réponse.

3) On considère le tétraèdre OABK.

a) Montrer que le volume de ce tétraèdre est $\frac{1}{9}$. b) Calculer alors la distance du point K au plan (P).

Exercice N°7 1)a) $A\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ *et* $B\left(0,\frac{2}{3},1\right)$. ; b) $\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1/3\\-1\\2/3\end{pmatrix}$.

c) L'aire du triangle OAB est égal à
$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{u}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$.



2) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1/3\\-1\\2/3\end{pmatrix}$ donc,

M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\vec{u}=0$. On en déduit une équation cartésienne de (P) :x+3y-2z=0. On vérifie alors que le point C appartient bien à (P).

3) a) Le volume V du tétraèdre OABK est égal à : $\frac{1}{3}\times aire(OBK)\times AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (OBK). On a AH=LK=1, de plus, le triangle (OBK) est rectangle en K. son aire est : $\frac{1}{3}$ *donc* $V=\frac{1}{9}$.

b) Si H' est le projeté orthogonal de K sur le plan (OAB), on a aussi : $V=\frac{1}{3}\times aire(OBA)\times KH'$ or l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$ alors $KH'=3\times\frac{1}{9}\times\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$ c'est la distance du point K au plan (P).

Exercice N°8 L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points S(1,1,2), A(-3,0,0) , B(1,0,-2)et C(-1,1,0).

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P d'équation :x-2y+2z+3=0.
2) Soit Q l'ensemble des points M de E vérifiant $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BS}\right)\overrightarrow{SM}=0$.
   a) Montrer que Q est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
   b) Montrer que P coupe Q suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.
   c) Calculer la distance du point A à la droite Δ.
3) a) Vérifier que SABC est un tétraèdre puis calculer son volume V.
   b) Calculer l'aire ***A*** du triangle SAC puis déduire la distance du point B au plan (SAC).
4) Soit Γ l'ensemble des M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0$.
   a) Montrer que Γ est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées de son centre.
   b) Montrer que Γ est une sphère circonscrite au tétraèdre SABC.
   c) Montrer que P coupe Γ suivant un cercle que l'on caractérisera.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice N°8 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ *on a* $\begin{vmatrix}4&2\\0&1\end{vmatrix}=4\neq 0$ *donc* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C déterminent un plan. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc P :2x-4y+4z+d=0, le plan P passe par A donc -6+d=0 d'où d=6 ainsi P :x-2y+2z+3=0.

2) a) Soit $M(x,y,z)\in E$ $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}2\\8\\-2\end{pmatrix}$, $M\in Q \Leftrightarrow 2(x-1)+8(y-1)-2(z-2)=0$

$\Leftrightarrow Q: x+4y-z-3=0$.

b) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\-2&4\end{vmatrix}=6\neq 0$; $\overrightarrow{n_P}$ *et* $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires donc P et Q sont sécantes suivant une droite

Δ ; $\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0 & (1)\\ x+4y-z-3=0 & (2)\end{cases}$; $(2)-(1)\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0\\ 6y-3z-6=0\end{cases}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0\\ 2y-z-2=0\end{cases}$ On pose

$y=\alpha\Rightarrow\Delta:\begin{cases}y=\alpha\\ z=2y-2=2\alpha-2\\ x=2y-2z-3=2\alpha-4\alpha+4-3\end{cases}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1-2\alpha\\ y=\alpha\\ z=-2+2\alpha\end{cases}$; $(\alpha\in\mathbf{R})$.

c) $\Delta=D(B,\vec{u})$ *avec* $B(1,0,-2)$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $d(A,\Delta)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ *on a* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$ donc

$d(A,\Delta)=\dfrac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{6}{3}=2.$

3) a) P :x-2y+2z+3=0, S(1,1,2) on a : $1-2+4+3\neq 0$ *donc* $S\notin P$ ainsi SABC est un tétraèdre.

$V=\dfrac{1}{6}\left|dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right)\right|=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}4&2&4\\0&1&1\\-2&0&2\end{vmatrix}=\dfrac{1}{6}\left(4\times 2-0-2\times(-2)\right)=2$.

b) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\right\|$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ *donc* A= $\dfrac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\sqrt{6}.ua$, $V=\dfrac{A\times d\left(B,(SAC)\right)}{3}.uv$ d'où

$d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{3V}{A}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

4) a) Soit M(x,y,z) un point de E, $M\in\Gamma\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0\Leftrightarrow (x^2)+(y^2+7y)+(z^2-2z)-9=0\Leftrightarrow$

$x^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+(z-1)^2-1-9=0\Leftrightarrow x^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{98}{4}$ d'où Γ est la sphère de centre

$I\left(0,-\dfrac{7}{2},1\right)$ *et de rayon* $R=\dfrac{\sqrt{89}}{2}$.

b) On a :1+1+4+7-4-9=0 donc $S\in\Gamma$, 9+0+0+0-0-9=0 donc $A\in\Gamma$, 1+0+4+0+4-9=0 donc $B\in\Gamma$ et 1+1+0+7-0-9=0 donc $C\in\Gamma$ d'où Γ est la sphère circonscrite au tétraèdre SABC.

c) $\{A,B,C\}\subset P$ *et* $\{A,B,C,S\}\subset\Gamma$ *donc* $P\cap\Gamma=\zeta$: *le cercle circonscrit au triangle ABC*.

Exercice N°9 Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E. Soit A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) et D(1,1,1) quatre points de l'espace.

1) a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

b) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.
c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) Vérifier qu'une équation du plan P passant par A, B et C est x+y+z-1=0.

3) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace et vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$.
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.
b) Montrer que P coupe S suivant un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit $h: E \to E,\ M \mapsto M'$ tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.
a) Montrer que le G centre de gravité du triangle ABC est l'unique point invariant par h.
b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
c) Déterminer S'=h(S) ainsi que $S' \cap P$.

Exercice N°9 1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$

$= -(-1) - (-1) = 2 \neq 0$ alors A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) $A_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.ua$. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.uv$

c) $d\left(D,(ABC)\right) = h$ où h est l'hauteur issu de D du tétraèdre ABCD. $V_{ABCD} = \frac{h \times A_{ABC}}{3} \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{A_{ABC}}$

$\Rightarrow d\left(D,(ABC)\right) = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) A(1,0,0),1+0+0-1=0 alors $A \in P$; B(0,1,0),0+1+0-1=0 alors $B \in P$;C(0,0,1), 0+0+1-1=0 alors $C \in P$ Or A,B et C ne sont pas colinéaires d'où x+y+z-1=0 est l'équation du plan P passant par A,B et C.

3) a) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ sig $(x^2-2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1+(z^2-2z+1)-1+1=0$ sig $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$ est l'équation d'une sphère de centre D(1,1,1) et de rayon $R = \sqrt{2}$.

b) $d\left(D,P\right) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < R = \sqrt{2}$ alors $P \cap S$ est un cercle de centre H projeté orthogonal de I sur P et de rayon

$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_H-1\\y_H-1\\z_H-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_H = 1+\alpha\\y_H = 1+\alpha\\z_H = 1+\alpha\end{cases}$;

$H \in P \Rightarrow 1+\alpha+1+\alpha+1+\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{3}$ alors $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Remarque : On a $\{A,B,C\} \in S$ et P=(ABC) alors $P \cap S$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) a) $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ alors l'unique point invariant par h est le centre de gravité G du triangle ABC (car $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$).

b) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{GM}$ alors h est une homothétie de centre G et de rapport 4. $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

c) S'=h(S) est la sphère de centre l'image du centre de S et de rayon $R' = |k|R = 4\sqrt{2}$;

$I' = h(I) \Rightarrow \overrightarrow{GI'} = 4\overrightarrow{GI} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_{I'}-\frac{1}{3}\\y_{I'}-\frac{1}{3}\\z_{I'}-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1-\frac{1}{3}\\1-\frac{1}{3}\\1-\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_{I'} = \frac{8}{3}+\frac{1}{3} = 3\\y_{I'} = 3\\z_{I'} = 3\end{cases}$ d'où $I'(3,3,3)$. $S \cap P$ est le cercle circonscrit au triangle

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

ABC or (ABC) est globalement invariant par h car il contient G on a $h(S\cap P)=h(S)\cap h(P)=S'\cap P$ d'où

$S'\cap P=h\left(\zeta_{(ABC)}\right)$ est le cercle de centre h(H)=H(G)=G et de rayon $4r=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Exercice N°10

Soit ABCDEFGH un cube d'arrête AB=1et I=A*D. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).
   b) Calculer le volume v du tétraèdre BIGE, en déduire le volume v' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.
2) Soit S la sphère de centre E et de rayon 1 et $S'=t_{\overrightarrow{AC}}(S)$.
   a) Montrer que S est tangente au plan (BIG) au point $O\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.
   b) Montrer que S' coupe (BIG) suivant un cercle (C') dont-on précisera le centre et le rayon.
   c) Montrer que (OB) est tangente à (C') en O.
3) Soit Δ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}$. Vérifier que G appartient à Δ et que Δ est une droite parallèle à (OB).

Exercice N°10 1)a) B(1,0,0), D(0,1,0), $I=A*D\Rightarrow I\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$ et G(1,1,1) $\Rightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix};\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$et\ \overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}$ vecteur normal à (BIG) donc (BIG) : $\dfrac{1}{2}x+y-z+d=0\ or\ B\in P$ donc

$\dfrac{1}{2}+0-0+d=0\Rightarrow d=-\dfrac{1}{2}$ d'où

(BIG) : $\dfrac{1}{2}x+y-z-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow (BIG): x+2y-2z-1=0$.

b) $v=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\right)\overrightarrow{BE}\right|}{6}$ or E(0,0,1) $\Rightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\left(\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\right)\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\times(-1)+0\times1+1\times(-1)=\dfrac{-3}{2}$ donc $v=\dfrac{1}{4}$ unité de volume

or h de rapport $-\dfrac{2}{3}$ donc $v'=\left|\dfrac{-2}{3}\right|^3 v=\dfrac{2}{27}$ unité de volume.

2) a) $d(E,(BIG))=\dfrac{|0+0-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$ donc S est tangente au plan (BIG) or $O\in(BIG)$ car $\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}-1=0$

on a $OE=\sqrt{\left(0-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=1$ $donc\ O\in S$; enfin S est tangente au plan (BIG) au point O.

b) On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ donc $t_{\overrightarrow{AC}}(E)=G;\ t_{\overrightarrow{AC}}(S)$ est la sphère de centre G et de même rayon que S d'où S' est la sphère de centre G et de rayon 1. $d(G,(BIG))=0$ car $G\in(BIG)$ alors $S'\cap(BIG)$ est le cercle (C') de centre G et de rayon 1 (rayon de S').

c) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{-1}{3}\end{pmatrix},\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}=0$ donc $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OG}$ or $O\in(C')$ car $GO=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=1$

donc (OB) est tangente à (C') en O.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

3) $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{-2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}$ alors $G\in\Delta$. $M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}\wedge\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{GM}=\vec{0}\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par G et parallèle à (OB).

2ème méthode : Soit M(x,y,z) ; $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{3}\\ y-\frac{2}{3}\\ z-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}\Leftrightarrow$ ....donner l'équation cartésienne de Δ.

Exercice N°11 L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère A(1,1,2), B(1,3,0) et C(2,1,1).

1) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en C. b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC)=P.
2) Soit S : $x^2+y^2+z^2-4x-6y-4z+12=0$ et P_m : $x+my+z-4=0$ $(m\in IR)$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Discuter suivant les valeurs de m la nature de $S\cap P_m$.
3) On pose m=1.
   a) Montrer que $S\cap P_1$ est un cercle ζ dont on précisera le centre H et le rayon r.
   b) Montrer que ζ est le cercle de diamètre [AB].
   c) Ecrire un équation cartésienne du plan Q strictement parallèle à P_1 et coupant S suivant un cercle de rayon $\sqrt{2}$.
4) Soit S' la sphère de centre J(1,2,1) et de rayon $2\sqrt{5}$. Déterminer les homothéties qui transforment S en S'.

Exercice N°11 1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=1+0-1=0$ donc le triangle ABC est rectangle en C.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Donc P : $-2x-2y-2z+d=0$, $A(1,1,2)\in P$ donc $-2-2-4+d=0$ d'où $d=8$ alors P : $-2x-2y-2z+8=0$ soit P : $x+y+z-4=0$.

2) Soit S : $x^2+y^2+z^2-4x-6y-4z+12=0$ et P_m : $x+my+z-4=0$ $(m\in IR)$.

a) 1ère méthode : $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow\left(x^2-4x\right)+\left(y^2-6y\right)+\left(z^2-4z\right)+12=0\Leftrightarrow$

$\left(x-2\right)^2-4+\left(y-3\right)^2-9+\left(z-2\right)^2-4+12=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2+\left(z-2\right)^2=5$. S est donc la sphère de rayon $R=\sqrt{5}$ et de centre I(2,3,2).

2éme méthode : S : $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz+d=0$ où a=-4, b=-6, c=-4 et d=12.

$h=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=\frac{16+36+16}{4}-12=5>0$ donc S est la sphère de rayon $R=\sqrt{5}$ et de centre I(2,3,2).

b) Discuter suivant les valeurs de m la nature de $S\cap P_m$. $d=d\left(I,P_m\right)=\frac{\left|2+3m+2-4\right|}{\sqrt{1^2+m^2+1^2}}=\frac{\left|3m\right|}{\sqrt{2+m^2}}$.

$R^2-d^2=5-\frac{9m^2}{2+m^2}=\frac{10-4m^2}{2+m^2}$.

m	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
R^2-d^2	-	0		+	0	-	
	$\varnothing$	|	un	cercle	|	$\varnothing$	

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

$S \cap P_m$			
	Un point	un point	

3) a) $m = 1 \in \left]-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right[$ d'où S et P_1 se coupent selon un cercle ζ. ζ est de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{10-4}{3}} = \sqrt{2}$. ζ est de centre H tel que H est le projeté orthogonal de I sur P_1. I(2,3,2) et $\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P_1 et on pose H(x,y,z)…… ?

Exercice N°12 L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : 2x-2y+z-2=0. Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$.

3) Déterminer les translations qui transforment P en un plan tangent à S.

Exercice N°12 1) S :$x^2+y^2+z^2-4y-5=0$; $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4y-5=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y^2-4y\right)+z^2-5=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2-4+z^2-5=0 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2+z^2=9$ d'où S est une sphère de centre $\Omega(0,2,0)$ et de rayon 3.

2) P :2x-2y+z-2=0 ; position de S et P : $d = d(\Omega,P) = \frac{|0-4-0+2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$. $R^2-d^2 = -4 = 5 > 0$ *donc* $R > d$. D'où S et P se coupent selon un cercle. Caractérisation de $S \cap P$: C'est un cercle (C) de rayon $\sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{5}$ et de centre H ; le projeté orthogonal de Ω sur P. $\Omega(0,2,0)$ *et* $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P et on pose H(x,y,z). $\overrightarrow{\Omega H}$ est colinéaire à $\vec{n} \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\overrightarrow{\Omega H} = \alpha\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2\alpha \\ y_H = 2-2\alpha \\ z_H = \alpha \end{cases}$; $H \in P$ donc les coordonnés de H vérifient l'équation de P d'où $2(2\alpha)-2(2-2\alpha)+\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$. D'où $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Conclusion : $S \cap P = C_{(H,\sqrt{5})}$.

3) Une translation $t_{\vec{u}}$ transforme un plan en un plan qui lui est parallèle. Si $t_{\vec{u}}(P) = P'$ on a P//P' et par suite P' :2x-2y+z+d=0. On veut que P' soit tangent à S. Donc $d(\Omega,P') = 3$ rayon de S or $d(\Omega,P') = \frac{|0-4+0+d|}{\sqrt{4+4+1}}$ donc $\frac{|-4+d|}{\sqrt{9}} = 3$. D'où $|d-4| = 3$ et par suite d-4=9 ou d-4=-9 on obtient d=13 ou d= -5. on trouve deux plans tangents à S et parallèles à P ; $P_1 : 2x-2y+z+13=0$ et $P_2 : 2x-2y+z-5=0$; $t_{\vec{u_1}}(P) = P_1$ et $A(0,0,2) \in P$. On pose $A' = t_{\vec{u_1}}(A)$ on a alors $A' \in P_1$ *et* $\overrightarrow{AA'} = \vec{u_1}$ et la droite (AA') coupe P_1 en A'. Or la droite (AA') est perpendiculaire au plan P donc $\vec{n}$ qui est un vecteur normal de P est un vecteur directeur de (AA') . On

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

pose A'(x',y',z'). On a $\overrightarrow{AA'} = \beta\vec{n}$. On obtient $(AA'): \begin{cases} x' = 2\beta \\ y' = -2\beta \\ z' = 2+\beta \end{cases} (\beta \in IR)$. $A' \in P_1 \Rightarrow$

$2(2\beta) - 2(-2\beta) + (2+\beta) + 13 = 0$ ce qui donne $\beta = \frac{-15}{9} = \frac{-5}{3}$ par suite $A'\left(\frac{-10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *et* $\vec{u_1} = \overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} \frac{-10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$.

4) $t_{\vec{u_2}}(P) = P_2$ et $A(0,0,2) \in P$. On pose $A'' = t_{\vec{u_2}}(A)$. On a alors : $A'' \in P_2$ *et* $\overrightarrow{AA''} = \vec{u_2}$ et la droite (AA'') coupe P_2 en A''. Or la droite (AA'') est confondue avec la droite (AA'). $A'' \in P \Rightarrow 2(2\beta) - 2(-2\beta) + (2+\beta) - 5 = 0$

ce qui donne $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ par suite $A''\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ *et* $\vec{u_2} = \overrightarrow{AA''} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; les translations qui répondent à la question sont $t_{\vec{u_1}}$ *et* $t_{\vec{u_2}}$.

Exercice N°13 On considère dans l'espace un cube d'arête 3cm, noté ABCDEFGH. Soit I le barycentre des points pondérés (E,2) et (F,1) ; J celui de (F,1) et (B,2) et enfin K celui de (G,2) et (C,1). On note Δ l'ensemble des points équidistants de I, J et K.

1) Soit Ω le point de Δ située dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Dans la suite de l'exercice, on ce place dans un repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

2) Donner les coordonnées des points I, J et K.

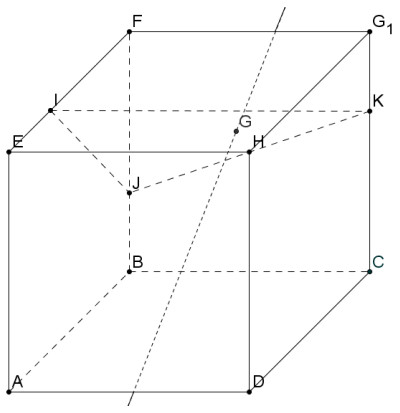
3) Soit P(2,0,0) et Q(1,3,3). Montrer que (PQ) est orthogonale au plan (IJK).

4) Soit M(x,y,z) un point de l'espace. a) Montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow (x,y,z)$ est une solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ? b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ.

5) a) Donner une équation cartésienne du plan (IJK). b) En déduire les coordonnées exactes de Ω.

6) Soit N un point variable de [EF]. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABN puis celui de centre du tétraèdre ABNC.

Exercice N°13 1) $\Omega \in \Delta$ *donc* $\Omega I = \Omega J = \Omega K$. $\Omega \in (IJK)$ *donc* Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.



1) I barycentre des points pondérés (E,2) et (F,1) donc $2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AI}$ *d'où* $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$. On a E(0,0,3) F(0,3,3) donc I(0,1,3) de même pour J(3,3,1) et K(3,3,2).

2) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IJ} = 6-6 = 0 \text{ donc } (PQ) \perp (IJ) \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IK} = -3+6-3 = 0 \text{ donc } (PQ) \perp (IK) \end{array}\right\}$ *d'où* $(PQ) \perp (IJK)$

.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

3) a) $M \in \Delta \Leftrightarrow MI^2 = MJ^2 = MK^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = x^2+(y-3)^2+(z-1)^2 \\ x^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ 3x+z=6 \end{cases}$. On pose $z=\alpha;\ \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow M(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-\frac{1}{3}\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbf{R}$ donc Δ est la droite passant par P(2,0,0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $P \in \Delta$ d'après a). $\begin{cases} y_Q - z_Q = 3-3=0 \\ 3x_Q + z_Q = 3+3=6 \end{cases}$ *donc* $Q \in \Delta$.

4) a) $(PQ) \perp (IJK)$ *donc* $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (IJK) d'où (IJK) :-x+3y+3z+d=0,

$I(0,1,3) \in (IJK)$ donc 3+9+d=0 d'où d=-12 d'où (IJK) :-x+3y+3z-12=0.

b) $\Omega \in \Delta \cap (IJK)$ *donc* $\begin{cases} 3x+z=6 \\ y=z \\ -x+3y+3z-12=0 \end{cases}$ *d'où* $\begin{cases} 3x+z=6 \\ y=z \\ -x+6y=12 \end{cases}$ et par suite $\begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = \frac{42}{19} \\ z = \frac{42}{19} \end{cases}$ *donc* $\Omega\left(\frac{24}{19},\frac{42}{19},\frac{42}{19}\right)$.

5) Soit L=A*B, si G_1 est le centre de gravité de ABN donc $\overrightarrow{LG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LN}$ *d'où* $G_1 = h_{\left(L,\frac{1}{3}\right)}(N)$. Comme N décrit [EF] donc G_1 décrit [E'F'] où $E' = h_{\left(L,\frac{1}{3}\right)}(E)$ *et* $F' = h_{\left(L,\frac{1}{3}\right)}(F)$. si G_2 est le centre de gravité de ABMC donc $\overrightarrow{CG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG_1}$ *d'où* $G_2 = h_{\left(C,\frac{2}{3}\right)}(G_1)$. Comme G_1 décrit [E'F'] donc G_2 décrit $[E''F'']$ où $E'' = h_{\left(C,\frac{2}{3}\right)}(E')$ *et* $F'' = h_{\left(C,\frac{2}{3}\right)}(F')$.

<u>Exercice N°14</u> L'espace E est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit h l'homothétie de centre le point A(2,4,-4) et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Soit la sphère S de centre O et de rayon R=4. Ecrire un équation de la sphère S'=h(S).
2) Montrer que l'intersection de S et S'est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Exercice N°14</u> 1) S est la sphère de centre O et de rayon R=4 et S'=h(S) donc S'est la sphère de centre O' =h(O) et de rayon $R' = \frac{1}{2}R = 2$. On pose O'(a',b',c'), on a $\overrightarrow{AO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$ *donc* $\begin{cases} a'-2 = \frac{1}{2}(-2) \\ b'-4 = \frac{1}{2}(-4) \\ c'+4 = \frac{1}{2}(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=1 \\ b'=2 \\ c'=-2 \end{cases}$ on trouve O'(1,2,-2) et par suite S' : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow S': x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+=0$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

2) $S \cap S'$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-16=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-16=0 \\ 2x+4y-4z-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow S \cap S' = S \cap P$

où P :2x+4y-4z-21=0. $d(O,P)=\dfrac{|-21|}{\sqrt{4+16+16}}=\dfrac{21}{6}=\dfrac{7}{2}<R=4$ donc $S \cap P$ est un cercle (C) de rayon

$r=\sqrt{16-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ et de centre I projeté orthogonal de O sur le plan P. On pose $I(x_0,y_0,z_0)$ *et* $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un

vecteur normal de P. On a $\begin{cases} \overrightarrow{OI}=\alpha\vec{n} \\ I \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2\alpha \\ y_0=4\alpha \\ z_0=-4\alpha \\ 2x_0+4y_0-4z_0-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2\alpha \\ y_0=4\alpha \\ z_0=-4\alpha \\ \alpha=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12} \end{cases}$. On trouve $I\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{7}{3},\dfrac{-7}{3}\right)$.

Exercice N°15 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan d'équation : x+y+z-3=0 et la droite (D) passant par le point A(1,2,3) et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

1) Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires.

2) Soit M(x,y,z) un point de l'espace, on lui associe le point M'(x',y',z') tel que (P) est le plan médiateur de [MM'].

a) Montrer que $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z+2 \\ y'=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{3}z+2 \\ z'=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z+2 \end{cases}$

b) Déterminer les coordonnées du point A' associé à A. En déduire les coordonnées de H, intersection de (P) et (D).

c) Retrouver les coordonnées de H avec une autre méthode.

1) a) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble (S) des points M de l'espace tel que $\dfrac{MA}{MH}=\sqrt{5}$.

b) Reconnaitre (S) et déterminer ses éléments caractéristiques.

c) Déterminer l'intersection de (S) et (P).

2) Soit Q le plan d'équation x+y+z=0 et h l'homothétie de centre A, qui transforme (P) en (Q).

Déterminer le rapport de h. Caractériser $h\left((S)\cap(Q)\right)$.

Exercice N°15 1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc D et P sont perpendiculaires.

2) a) M(x,y,z) et M'(x',y',z') , P est le plan médiateur de [MM'] équivaut à $\begin{cases} M*M' \in P \\ \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{N} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

$M*M' \in P \Leftrightarrow x+x'+y+y'+z+z'-6=0$ (1). $\overrightarrow{MM'}$ *et* $\vec{N}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$\overrightarrow{MM'}=\alpha\vec{N} \Rightarrow \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=\alpha \\ z'-z=\alpha \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y+\alpha \\ z'=z+\alpha \end{cases}$; (1) $\Rightarrow x+x+\alpha+y+y+\alpha+z+z+\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z+2$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z+2 \\ y'=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{3}z+2 \\ z'=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z+2 \end{cases}$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

b) A(1,2,3) donc A'(x',y',z') avec $\begin{cases} x' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times 2 - \frac{2}{3}\times 3 + 2 = -1 \\ y' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times 2 - \frac{2}{3}\times 3 + 2 = 0 \\ z' = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 2 + 2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} A \in D \\ D \perp P \\ P \text{ est le plan médiateur de } [AA'] \end{cases}$ donc H=A*A'

est le projeté orthogonal de A sur P et par suite $\{H\} = D \cap P$; H(0,1,2).

c) $H(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \overrightarrow{AH} = \beta\vec{u},\ \beta \in \mathbf{R} \end{cases}$; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \beta+1 \\ y = \beta+2 \\ z = \beta+3 \end{cases}$ on a: x+y+z-3=0 $\Leftarrow \beta = -1 \Rightarrow$ H(0,1,2).

3) a) $(S) = \left\{ M \in E \,/\, \frac{MA}{MH} = \sqrt{5} \right\}$ Soit M(x,y,z) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 3-z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ 2-z \end{pmatrix}$; donc $M \in (S) \Leftrightarrow \frac{MA}{MH} = \sqrt{5} \Leftrightarrow MA^2 = 5MH^2$

$\Leftrightarrow (1-x^2) + (2-y)^2 + (3-z)^2 = 5\left(x^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2\right) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2x - 6y - 14z + 11 = 0$.

b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}z + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(z-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{11}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$ d'où est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{7}{4}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$d = d(\Omega, P) = \frac{\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}-3\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} < R$ donc $P \cap (S)$ est un cercle de centre J et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{15}{16} - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

J est le projeté orthogonal de Ω sur P. On a $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega J} = \alpha\vec{N},\ \alpha \in \mathbf{R} \\ J \in P \end{cases}$. Soit J(x,y,z)

$\overrightarrow{\Omega J}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{4} \\ y-\frac{3}{4} \\ z-\frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = \alpha - \frac{1}{4} \\ y = \alpha + \frac{3}{4} \\ z = \alpha + \frac{7}{4} \end{cases}$, $J \in P$ donc x+y+z-3=0 donc $\alpha = \frac{1}{4}$ et par suite J=H. Conclusion : $(S) \cap P = \zeta_{(H,\sqrt{3})}$.

4) Q :x+y+z=0, h l'homothétie de centre A tel que h(P) =Q. $F(0,0,3) \in P$ donc $h(F) = F' \in Q$. On a

$\begin{cases} F' \in (AF) \cap Q \\ \overrightarrow{AF'} = k\overrightarrow{AF} \text{ où } k \text{ est le rapport de h.} \end{cases}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(AF): \begin{cases} x = -\gamma \\ y = -2\gamma \\ z = 3 \end{cases}$; $\gamma \in \mathbf{R}$. On pose F'(x,y,z) donc

$F'(-\gamma, -2\gamma, 3), F' \in Q \Leftrightarrow -\gamma - 2\gamma + 3 = 0$ donc $\gamma = 1$ d'où F'(-1,-2,3) $\overrightarrow{AF'}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} -2 = k \\ -4 = -2k \\ 0 = 0 \end{cases}$ et par suite k=2.

$h(S) \cap Q = h(S) \cap h(P) = h(S \cap P)$ or $(S) \cap P = \zeta_{(H,\sqrt{3})}$ donc $h(S \cap P)$ est le cercle $\zeta'_{(H';|k|\sqrt{3})}$ avec H'=h(H) et k=2.

$\overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{AH}$ donc $\begin{cases} x_{H'} - 1 = 2(-1) \\ y_{H'} - 2 = 2(-1) \\ z_{H'} - 3 = 2(-1) \end{cases}$ donc H'(-1,0,1) Conclusion : $h(S) \cap Q = \zeta'_{(H',2\sqrt{3})}$.

Exercice N°16 L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1,0,2), B(0,0,1), C(0,-1,3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnés (0,2,3). b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.
2) a) Soit P le plan d'équation :x-2y-z+5=0. Montrer que P est parallèle à (ABC).

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que $K\in P$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice N°16 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}$.

D'où $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{OA}\Rightarrow E(0,2,3)$

b) Soit V le volume du tétraèdre ABCE alors $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}AE^2=\frac{1}{6}(1+4+1)=1.uv$.

1) a) P a pour équation x-2y-z+5=0 ; un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}=-\overrightarrow{AE}$ et par suite P est parallèle au plan (ABC). (car $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal à (ABC)).

b) On a : $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $\begin{cases}2(-x_K)+(-x_K)=0\\2(2-y_K)+(-1-y_K)=0\\2(3-z_K)+(3-z_K)=0\end{cases}\Rightarrow K(0,1,3)$. On a : 0-2-3+5=0 donc $K\in P$.

2) a) h est l'homothétie de centre E qui transforme C en K. On pose a son rapport. On a $\overrightarrow{EK}=a\overrightarrow{EC}$. d'autre part $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}, d'où\ \overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC},\ ainsi\ a=\frac{1}{3}$.

b) L'image du plan (ABC) par h est le plan parallèle à (ABC) passant par h(C)=K, donc h(ABC)=P. $A\in(ABC)\cap(AE)$ donc $h(A)\in P\cap(AE)=\{I\}$. ((AE) passe par le centre de h) d'où h(A)=I et de même h(B)=J. Le tétraèdre EIJK est l'image du tétraèdre ABCE par h. son volume est $V'=a^3V=\frac{1}{27}\times1=\frac{1}{27}.uv$

Exercice N°17 Soit ABCDEFGH un cube de coté 1.

1) a) Calculer $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}$. b) Montrer que le triangle AHF est équilatéral. Déterminer l'air du triangle AHF.

2) a) Montrer que le volume du tétraèdre AEFH est $\frac{1}{6}$. b) Déduire la distance du point E au plan AFH.

3) L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, F et H.

b) Retrouver la distance du point E au plan P.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le volume du tétraèdre AF'H'E' avec F', H' et E' les images respectives par h des points F, H et E.

Exercice N°17 1) a) $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}$.

b) [AH] est le diagonale du carré EADF $\Rightarrow AH=\sqrt{2}AD$; [AF] est le diagonale du carré ABFE $\Rightarrow AF=\sqrt{2}AB$ et [FH] est le diagonale du carré EFGH $\Rightarrow FH=\sqrt{2}EF$ or ABCDEFGH est un cube alors AD=AB=EF d'où FH=AF=AH alors AHF est équilatéral. $A_{AHF}=\frac{\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|}{2}$ or $\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|=AH^2.\sin\widehat{HAF}=AH^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}AB\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

donc $A_{AHF}=\frac{\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.ua$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

2) a) $V_{AEFH}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}\right).\overrightarrow{EA}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA}\right|=\frac{1}{6}EA^2=\frac{1}{6}.uv$.

b) $\frac{1}{3}d\left(E,(AFH)\right)=\frac{V_{(AEFH)}}{A_{AHF}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ donc $d\left(E,(AHF)\right)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3 a) Le plan passant par A,F et H est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AH}$, A(0,0,0) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\Rightarrow F(1,0,1)$,

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Rightarrow H(0,1,1)$ *donc* $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc P :-x-y+z+d=0 or $A\in P$ alors -0-0+0+d=0 alors P :-x-y+z=0.

b) On a E(0,0,1) donc $d\left(E,P\right)=\frac{\left|-0-0+1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) $h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$; h(F)=F', h(H)=H',h(E)=E' et h(A)=A alors $V_{(AF'H'E')}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.uv$.

Exercice N°18

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E, on donne trois points A(2,-2,1) ; B(2,1,-2) et C(1,2,2).

1) a) Montrer que OABC est un tétraèdre dont les 3 faces OAC, OAB et OBC sont des triangles rectangles et isocèles isométrique.

b) Donner alors la nature du triangle ABC et préciser les coordonnés du centre de gravité G du triangle ABC.

2) a) Déterminer les expressions analytiques de l'homothétie h de centre G et de rapport $k=\frac{-1}{2}$.

b) Déduire alors les coordonnés des points A', B', C', et O' images respective par h des points A, B, C, et O.

3) Soit S la sphère de centre O de rayon R=3.

a) Préciser S'=h(S) ainsi que h((ABC)).

b) Prouver que S et S' coupent le plan (ABC) suivant deux cercles (ζ) *et* (ζ') excentriques en G dont on précisera le rayon de chacun.

Exercice N°19 $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé directe de E, B(2,0,0), C(0,2,0) et D(-2,0,0).

1) Montrer que le triangle BCD est rectangle. 2) Déterminer une équation de la sphère (S) de diamètre [BD].

3) Soit I(-1,1,0) et soit P le plan passant par C et perpendiculaire à la droite (OI).

a) Donner une équation cartésienne du plan P.

b) Montrer que P et (S) sont sécants suivant un cercle (C) qu'on déterminera le centre et le rayon.

4) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x,y,z) associe le point M'(x',y',z') tels que

$$\begin{cases}x'=-3x-4\\y'=-3y+4\\z'=-3z\end{cases}.$$

a) Déterminer la nature de h et ces éléments caractéristiques.

b) Soit (S') la sphère image de (S) par h. Donner une équation cartésienne de (S').

c) Déterminer les translations qui transforme P en un plan tangent à (S') et de vecteurs orthogonaux à P

5) Soit S_1 la sphère de centre I et de rayon 3. Montrer qu'il existe deux homothéties qui transforme S en S'.

Exercice N°20 L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(0,1,1), B(1,3,3) et C(-3,-2,1).

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure en radian de $\hat{BAC}$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis donner une équation cartésienne du plan P=(ABC).

c) Déterminer le volume v du tétraèdre OABC.

2) Soit t l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M' tel que :
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM}$.

a) Montrer que t une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AB}$.

b) Donner les expressions analytiques de t. en déduire les coordonnés du point A'=t(A)

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de E tel que :$x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont-on préciser le centre et le rayon.

b) Montrer que S'= t(S) coupe P=(ABC) suivant un cercle dont-on précisera le centre H et le rayon r.

Exercice N°21 L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.(S) l'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant $x^2+y^2+z^2=2x+2y-2z=0$.

1) a)Montrer que (S) est une sphère que l'on caractérisera.. b) Soit B(2,2,-2) ; Montrer que [OB] est une corde de (S).

2) Soit M un point variable de (S) et C le point de E tels que OMCB soit un parallélogramme.

a) Montrer que C est l'image de M par une translation. b) En déduire l'ensemble des points C.

3) Soit G le centre de gravité du triangle MBC et A' le symétrique de O par rapport à B.

a) Montrer que G est l'image de M par une homothétie h de centre A' et dont on précisera le rapport.

b) En déduire l'ensemble décrit par G.

Exercice N°23 Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E .

$S = \left\{M\left(x,y,z\right) \in E / x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0\right\}$ et P_m: mx-y=0 où $m \in IR$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

2) a) Etudier en fonction de m la nature de l'intersection $P_m \cap S$ .b) On note $P = P_3$ *et* $Q = P_{-\frac{1}{3}}$ montrer que $P \perp Q$.

c) On note $P \cap S = \zeta$ *et* $\zeta' = Q \cap S$. Montrer que ζ et ζ' sont deux cercles isométriques dont on précisera le rayon r et les coordonnés de H et H' centres respectifs de ζ et ζ' dans $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

2) a) Le plan (IHH') coupe la droite commune Δ de P et Q en Ω, donner la nature du quadrilatère $IH\Omega H'$.

b) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = -2\vec{k}$, préciser les coordonnés des points I_1, H_1, Ω_1 *et* H_1' images respectives de I, H, Ω *et* H' par la translation t.

c) Déterminer le volume du parallélépipède $IH\Omega H' I_1 H_1 \Omega_1 H_1'$.

Exercice N°18 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1, on désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).

b) Montrer qu'une équation du plan (ACF) est :-x+y+z=0.

c) Montrer que la droite (BH) est la perpendiculaire au plan (ACF) en un point que l'on précisera.

2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$.

a) Montrer que h(H)=P et h(B)=Q. b) Donner l'expression analytique de h.

3) a) Soit (R) l'image du plan (ACF) par h. Montrer que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera.

b) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre $\in \left(NN'\right)$.

Exercice N°18 1) a) B(1,0,0) et H(0,1,1) donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\left(BH\right) = D\left(B,\overrightarrow{BH}\right): \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbf{R}$

b) Les points A, C et F ne sont pas alignés (ABCDEFGH un cube) A(0,0,0), C(1,1,0) et F(1,0,1). Les coordonnées des points A, C et F vérifient l'équation -x+y+z=0 donc (ACF) : -x+y+z=0.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

c) $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal au plan (ACF) donc la droite (BH) est perpendiculaire à (ACF).

$N(x,y,z)\in(BH)\cap(ACF)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\-x+y+z=0\end{cases}$ $d'où\ -1+\alpha+\alpha+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

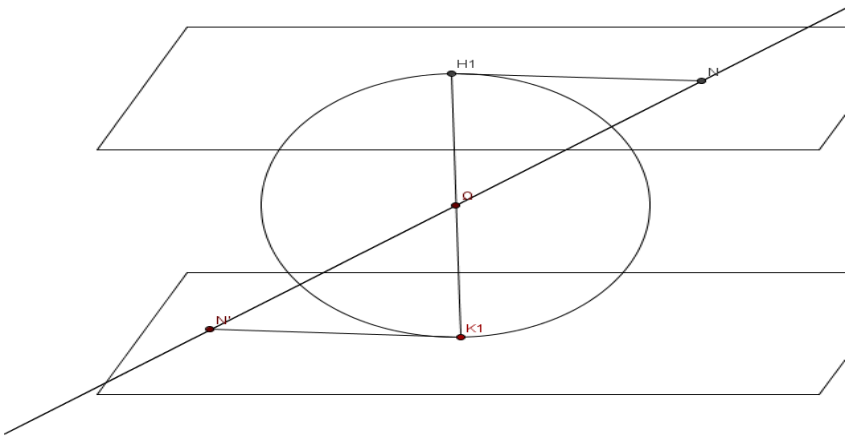
2) K=F*G, G(1,1,1) et $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\Rightarrow K\left(1,\frac{1}{2},1\right)$; h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$.

a) P est le centre de gravité du triangle HGF et K=F*G donc $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ $d'où\ h(H)=P$ de même h(B)=Q.

b) $h:M(x,y,z)\mapsto M'(x',y',z')\Rightarrow\begin{cases}x'=kx+(1-k)a\\y'=ky+(1-k)b\\z'=kz+(1-k)c\end{cases}$ $avec\ k=\frac{1}{3}\ et(a,b,c)=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$. Donc $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\\y'=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\\z'=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\end{cases}$.

3) a) $\begin{cases}h(ACF)=(R)\\(BH)\perp(ACF)\ au\ point\ N\\h((BH))=(PQ)\end{cases}$, donc (PQ) est perpendiculaire au plan (R) au point N'=h(N).

$\begin{cases}N'=h(N)\\N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ $donc\ N'\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$.



b) Soit Ω le centre d'une sphère tangente à (R) et (ACF) en H et K (respectivement) et R son rayon.

$\Omega\in(NN')$ alors les triangles $\Omega KN'$ $et\ \Omega HN$ sont isométriques donc Ω est le milieu de [NN']

$\Rightarrow\Omega\left(\frac{7}{9},\frac{7}{18},\frac{5}{9}\right)$. (S) est tangentes à (ACF)

$\Rightarrow R=d(\Omega,(ACF))=\frac{\left|-\frac{7}{9}+\frac{7}{18}+\frac{5}{9}\right|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{18\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}\Rightarrow(S):\left(x-\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{7}{18}\right)^2+\left(z-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{1}{108}$.

<u>2ième méthode :</u> Une représentation paramétrique de (NN') est $\begin{cases}x=\frac{2}{3}+2\beta\\y=\frac{1}{3}+\beta\\z=\frac{1}{3}+4\beta\end{cases}$ $(\beta\in\mathbf{R})$ $\begin{cases}(R)//(ACF)\\N'\in(R)\end{cases}$

$\Rightarrow(R):-x+y+z-\frac{1}{3}=0$. $d(\Omega,(ACF))=d(\Omega,(R))\Rightarrow\sqrt{3}|\alpha|=\frac{\left|3\alpha-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{3}}$ $donc\ \alpha=\frac{1}{18}\Rightarrow\Omega\left(\frac{7}{9},\frac{7}{18},\frac{5}{9}\right)$.

<u>Exercice N°16</u> Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

1) a) Montrer que DIFJ est un losange puis montrer que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (DIJ).

c) Soit M le point de $[EF]$ *tel que* $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$. Déterminer l'aire de l'intersection de la pyramide EDIFJ avec le plan parallèle au plan (DIF) passant par M.

d) Calculer le volume de pyramide EDIFJ.

2) Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ).

a) Montrer que $K\in\Delta$. b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de Δ et (DIJ).

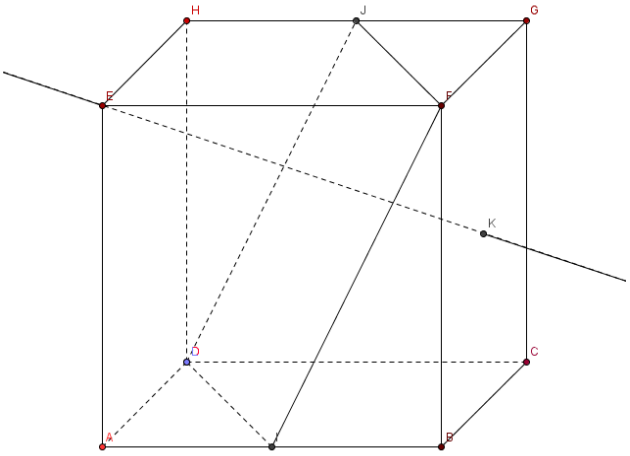
c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3) Soit S l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient : $x^2+y^2+z^2-2x-y-z+\frac{4}{3}=0$.

a) Vérifier que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que L est un point de S. Quelle propriété géométrique relative à S et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?

Exercice N°16 1) a) Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ on a A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; C(1,1,0) ; D(0,1,0) ; E(0,0,1) ; F(1,0,1) ; G(1,1,1) et H(0,1,1). I=A*B donc $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$; J=G*H donc $J\left(\frac{1}{2},1,1\right)$; K=B*G donc $K\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JF}\\ On\ \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}\ donc\ DI=DJ=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{array}\right\}$ d'où DIFJ est un losange.

L'aire du losange DIFJ est $A=\frac{IJ\times DF}{2}$. On a $IJ=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ *et* $DF=\sqrt{3}$ *donc* $A=\frac{\sqrt{6}}{2}.ua$.

b) un vecteur normal à (DIJ) est $\vec{n}=\overrightarrow{DI}\wedge\overrightarrow{DJ}$, $x_{\vec{n}}=\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$, $y_{\vec{n}}=\begin{vmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$ *et* $z_{\vec{n}}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$ donc

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ d'où\ (DIJ):-x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+d=0\ \ D\in(DIJ)\ donc\ \frac{-1}{2}+d=0\ d'où\ d=\frac{1}{2}$. Conclusion : (DIJ) :2x+y-z-1=0.

c) on a : $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}\ donc\ M=h_{\left(E,\frac{1}{4}\right)}(F)$. Le plan parallèle à (DIJ) passant par M coupe le pyramide EDIFJ suivant un losange L qui est l'image du losange DIFJ par l'homothétie $h_{\left(E,\frac{1}{4}\right)}$. L'aire du losange intersection L est égal à $\left(\frac{1}{4}\right)^2\times$(l'aire de DIEJ) donc $A(L)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{32}.ua$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...

d) le volume du pyramide EDIFJ est $V=\dfrac{A_{(DIFJ)}\times h}{3}$ où $A_{(DIFJ)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $et\ h=d\left(E,(DIJ)\right)=\dfrac{|2\times 0+0-1-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

donc $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{3}.uv$.

2) a) $\Delta\perp(DIJ)$ *donc* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ d'où une représentation paramétrique de Δ est

$\begin{cases}x=2\alpha\\y=\alpha\\z=1-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbf{R}$, pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$ on a $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\\z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ sont les coordonnés du point K donc $K\in\Delta$.

b) Les coordonnés d'un point N de Δ sont $(2\alpha,\alpha,1-\alpha)$; $\alpha\in\mathbf{R}$ $N\in(DIJ)\Leftrightarrow 4\alpha+\alpha-1+\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{3}$ $donc\ L\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

c) Les coordonnées du centre de gravité du triangle BEG sont : $x=\dfrac{1+0+1}{3}=\dfrac{2}{3}$; $y=\dfrac{0+0+1}{3}=\dfrac{1}{3}$ et $z=\dfrac{0+1+1}{3}=\dfrac{2}{3}$

qui sont les coordonnées du point L donc L est le centre de gravité de (BEG).

3) a) $x^2+y^2+z^2-2x-y-z+\dfrac{4}{3}=0\Rightarrow(x-1)^2-1+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{3}=0$

$\Rightarrow(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{6}>0$ donc S est la sphère de centre $K\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $r=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

b) $KL=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}=r$ $donc\ L\in S$. On a (KL) est orthogonale (DIJ) en L avec $L\in S$ et K le centre de S donc (DIJ) est tangent à S en L.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...